DOI:10.16083/j.cnki.1671-1580.2011.02.004
2011年第02期 第27卷 (总254期)
吉林省教育学院学报
JOURNAL OF EDUCATIONAL INSTITUTE OF JILIN PROVINCE
No.02, 2011 Vol.27 Total No.254

极限概念的精确化

王彩玲

(吉林大学 数学学院，吉林 长春 130012)

摘要：文章用变量的变化过程较为完整地讲述了极限，并给出了函数极限的精确定义，更加准确和深刻地揭示了极限的本质。

关键词：极限；精确定义；变量
中图分类号：G642.0　　文献标识码：A　　文章编号：1671-1580(2011)02-0150-03

一、极限的发展过程及意义

我们知道自然科学和工程技术中的很多概念都是用极限界定的。例如，物理学中的压强概念；非均匀物体的密度概念；化学中的浓度概念；力学中的应力概念；电工学中交流电的电流概念等等都是用极限来界定的。数学中更是如此，稍后就会知道，微积分中的核心问题——微分和积分也都是用极限定义的。因此，正确理解和灵活地运用极限概念是学好后继课和解决工程技术问题的必要基础。

极限的基本理论本质上是无限小(即无穷小量)分析理论。无限小的思想可以追朔到公元前6世纪的古希腊时代。那时的哲学家都研究数学，他们将无限小作为哲学观点来解释世界，并用无限小方法去解决诸如圆周长、圆面积、圆锥体体积等具体问题。包括公元17世纪的Newton和Leibniz所创建的微积分，其基本思想也是无限小思想。值得注意的是，他们在解决具体问题时虽然使用的是无限小，但在作为哲学观点来解释世界时，又把无限小看成是固定的、不可分的，这就使无限小披上了神秘的外衣，而陷入了无法摆脱的矛盾之中。直到公元19世纪，Cauchy引入了“ε-δ”方法才结束了长达两千年的矛盾之争，用极限方法取代了无限小分析方法。

今天，我们已不可能也没必要重走历史的发展过程，但可以吸取合理的内涵为我所用。基于这种想法，我们将用无限小分析的方法讲授极限理论。具体说，先用变量的变化过程直观地讲授无限小分析及其性质，然后再用无限小分析讲授极限，这样可以使初学者易于接受，使用也方便。当然问题并未完结，我们还必须将这种直观的极限理论进一步深化，即使用“ε-δ”语言极限概念进行精确地描述，只有这样才能更加准确和深刻地揭示极限的本质。

二、极限概念的精确化

1.过程的数学描述

我们知道函数的极限共有6种类型，它们是以自变量x的6种变化状态$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$来区分的，如果把x的6种变化状态统一记作$x\to r$，那么函数的6种类型极限便可统一记作$\lim\limits_{x\to r}f(x)=a$。当$x\to r$时，若函数$f(x)$只向正方向变，或只向负方向变，或既可取正也可取负的变，但不管哪种情形，$|f(x)|$都无限增大，则说$x\to r$时函数$f(x)$分别为正无穷大量，负无穷大量和无穷大量，并分别记作$\lim\limits_{x\to r}f(x)=+\infty$或$f(x)\to+\infty\ (x\to r)$，$\lim\limits_{x\to r}f(x)=-\infty$或$f(x)\to-\infty\ (x\to r)$，$\lim\limits_{x\to r}f(x)=\infty$或$f(x)\to\infty\ (x\to r)$。不难看出，实际上共有18种类型的无穷大量。这24种情况可统称为函数的变化状态。在这些变化状态中，不论是自变量还是函数的变化，总的可分为两大类：一类是变量无限趋于某个定数。我们设$u\to u_0$，它是指$u-u_0$为无穷小量。按无穷小量的定义，对任给的$\varepsilon>0$，在$u\to u_0$的过程中，总存在某一时刻，在这一时刻以后，便有$|u-u_0|<\varepsilon$，而$u\to u_0^+$及$u\to u_0^-$自然是$0<u-u_0<\varepsilon$及$0<u_0-u<\varepsilon$。另一类是变量的绝对值无限增大。我们设$u\to\infty$，它是指u为无穷大量。

收稿日期：2011-01-05
作者简介：王彩玲(1972-)，女，吉林长春人，吉林大学数学学院，博士，副教授。研究方向：高等数学。

按无穷大量的定义，对任给的 $M>0$，在 $u\to\infty$ 的过程中，总存在某一时刻，在这一时刻以后，便有 $|u|>M$，而 $u\to+\infty$，及 $u\to-\infty$ 自然是 $u>M$ 及 $u<-M$。利用上述变量的两类变化的表述，可以将自由变量的变化而引起的函数的变化状态一并精确地表示出来。下面侧重讨论极限的两种基本类型 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$。对于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，按定义是指：对任给的 $\varepsilon>0$，在 $x\to x_0$ 的过程中，当 x 充分地趋近于 x_0 以后，便有 $|f(x)-a|<\varepsilon$。

在这个定义中有三句关键的话：第一句是任给的 $\varepsilon>0$，第二句是 x 充分地趋近于 x_0 以后，第三句是 $|f(x)-a|<\varepsilon$。由于第一句中 $\varepsilon>0$ 的任意性，故第三句 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 表明 $f(x)$ 无限地趋近于常数 a，而这件事并不要求从过程一开始就成立，而是第二句话中的从某个时刻以后成立就可以了。

这三句话中不够明确的是第二句话“x 充分地趋近于 x_0 以后”。这句话实际上是指：存在某个 $x=x^*$，使得凡满足不等式 $|x-x_0|<|x^*-x_0|$ 的 x。若记 $|x^*-x_0|=\delta$，则第二句话就变成总存在一个 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，即满足这个不等式的 x。

再注意，在考查函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限时，$f(x)$ 在 x_0 点可以没有定义，因此在 $x\to x_0$ 的过程中，$x\neq x_0$，这反映在 $|x-x_0|<\delta$ 中就是要求 $0<|x-x_0|<\delta$。

对于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 可类似讨论。按定义，对任给的 $\varepsilon>0$，在 $x\to\infty$ 的过程中，当 $|x|$ 充分大以后，便有 $|f(x)-a|>\varepsilon$，这里的第二句话“当 $|x|$ 充分大以后”是指：在 $x\to\infty$ 过程中，存在某个 x^*，并记 $|x^*|=X$，使得凡满足不等式 $|x|>X$ 的 x。

这样，我们就把自变量的两种基本变化过程 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$，用定量化的数学语言精确地表示出来了，再结合函数的变化状态的描述，便可得到函数极限的精确定义。

2. 函数极限的精确定义

定义 1：假设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某去心邻域 $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ 内有定义，a 为一常数。如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，便有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则说函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限，并把 a 叫做 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，简单说成 $f(x)$ 在 x_0 点的极限为 a，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 或 $f(x)\to a\ (x\to x_0)$。

我们知道，$+\infty$，$-\infty$，∞ 本来不是数，因此在数轴上不对应点，但为了方便，我们分别把它们看作正无穷远点，负无穷远点和无穷远点。下面给出它们的邻域概念：

设 $M>0$，我们分别称点集

$$U(+\infty,M)\overset{\text{def}}{=}\{x\mid M<x<+\infty\}=\{x\mid x>M\},$$

$$U(-\infty,-M)\overset{\text{def}}{=}\{x\mid-\infty<x<-M\}=\{x\mid x<-M\},$$

$$U(\infty,M)\overset{\text{def}}{=}\{x\mid |x|>M\}=U(+\infty,M)\cup U(-\infty,-M)$$

为 $+\infty$，$-\infty$，∞ 的邻域，简记为 $U(+\infty)$，$U(-\infty)$，$U(\infty)$。

定义 2：假设函数 $f(x)$ 定义在 $U(\infty)$ 内，a 为一常数。如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，便有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则说当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 有极限，并把 a 叫做 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，简单说成 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 有极限 a，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 或 $f(x)\to a\ (x\to\infty)$。

对于数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，显然只要把定义 2 中的 x 换成 n，X 换成正整数 N 即可。至于其他变化状态可类似描述。为简单起见，列表如下。

② 存在 $\delta>0$ 或 $X>0$ ← ① 任给 $\varepsilon>0$ 或 $M>0$

↓

$$③\text{当}\left\{\begin{array}{l}0<|x-x_0|<\delta\\0<x-x_0<\delta\\0<|x_0-x|<\delta\\|x|>X\\x>X\\x<-X\end{array}\right.\text{时}\to ④\text{有}\left\{\begin{array}{l}|f(x)-a|<\varepsilon\\|f(x)|>M\\f(x)>M\\f(x)<-M\end{array}\right.$$

①②③④ 反映的是极限状态（包括无穷大量）定义中的四句话，箭头“→”表示先后次序。这样左边③的 6 个不等式和右边④的 4 个不等式各取一种“搭配”起来，便构成 24 种状态的精确描述。例如，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $f(x)<-M$，反映的就是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$。也就是说，如果对任给的 $M>0$，总存在一个 $\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，便有 $f(x)<-M$，这就是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$（即当 $x>x_0$ 且 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为负无穷大量）的精确定义。

3. 精确的极限定义论述极限问题

用精确定义给出变量极限有界性和保号性的证明。

（1）函数极限的局部有界性

局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则必存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 时，$f(x)$ 是有界的。

证：由极限的精确定义知，对 $\varepsilon=1$，必存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 即 $x\in U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$

时，有 $|f(x)-a|<1$ 于是 $|f(x)|\le|f(x)-a|+|a|\le|a|+1$. 这说明 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 内是有界的。

值的注意的是，由极限的存在性，只能得到函数在 x_0 的某个去心邻域 $U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 内是有界的，而不能得到函数在整个定义域内是有界的，因此称这种有界为局部有界。

例如，函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)$ 及 $(1,+\infty)$，而 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$，所以函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 1 的某个去心邻域 $U(1,\delta)\setminus\{1\}=(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 内是有界的。再注意 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 是一条在点 $(1,2)$ 处间断的直线，因此它在整个定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上是无界的。

但是，对数列的情形有所不同。若 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，则对 $\varepsilon=1$，必存在正整数 N，使得 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<1$. 从而有 $|x_n|\le|x_n-a|+|a|\le|a|+1$。令 $M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,|a|+1\}$，则对一切 $n=1,2,\cdots$，有 $|x_n|\le M$，这说明数列 $\{x_n\}$ 作为整标函数 $x_n=f(n)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，则 $\{x_n\}$ 在整个定义域内是有界的。类似地，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则存在 $M>0$ 及 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\le M$，即 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 是有界的。

（2）函数极限的局部保号性

局部保号性：假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，若 $a>0$（或 $a<0$），则必存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U(x_0,\delta)\setminus(x_0)$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），即在 $U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 上 $f(x)$ 与 a 同号。

证：只证 $a>0$ 的情形，$a<0$ 时类似可证。这时，我们取 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，则必存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$，即 $x\in U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 时，有 $f(x)>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$，这就是所要证明的。由于这种保号性只能在 x_0 的某个去心邻域 $x\in U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 内成立，而不能在整个定义域内成立，因此称为局部保号性。关于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的情形也有类似结论。

[参考文献]

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学（上册），第四版[M]. 北京：高等教育出版社，1996

[2] 李辉来，郭华. 大学数学·微积分（上册），第二版[M]. 北京：高等教育出版社，2010

[3] 王树禾. 数学思想史[M]. 北京：国防工业出版社，2003

[4] 王庚. 论极限教学的解决方案[J]. 大学数学，2004，20(3)，55～57.

[5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory With Applications. North-Holland, new York, 1976

[6] 复旦大学数学系. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社，2000，29－33

[7] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京：高等教育出版社，2006，23－24

[8] 陈鼎兴. 数学思维与方法的研究式教学[M]. 南京：东南大学出版社，2001.

[9] 刘玉琏. 数学分析讲义[M]. 北京：高教教育出版社，1992.

[10] F. H. Clarke. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley－Interscience, New York, 19

[11] Liu Q. H., Feng G. C., and Yu B., An Interior Point Path－following Method for Nonconvex Programming With Quasi Normal Cone Condition, 数学进展，Vol. 29, No. 4, 2000, P381－383

[12] B. D. Craren. Nonsmooth Multiobjecttive Programming. Numer. Funct. Anal. and Optimize. No. 10, 49－64, 1989.

[13] R. R. Egudo. Efficiency and Genrealized Convex Duality for Multiobjective Programs. J. Math. Anal. Appl., 138, 84－94, 1989.

[14] V. Preda. On Efficiency and Duality for Multiobjective Programs. J. Math. Anal. Appl., 166, 365－377, 1992

[15] Y. Tanaka. On Generalized Pseudo Convex Functions. J. Math. Anal. Appl., 144, 342－355, 1989.

[16] V. Jeyakumar. Equivalence of Saddle－Points and Optima, and Duality for a Class of Nonsmooth Non Convex Problems. J. Math. Anal. Appl., 130, 334－343, 1988

[17] C. R. Bector, S. Chondra, and M. K. Bector. Sufficient Optimality Conditions and Duality for a Quasiconvex Programming Problem. JOTA, Vol. 59, No. 2, 209－221, 1988

On Precise Definition of Limit

WANG Cailing

(College of Mathematics, JiLin University, Changchun Jilin 130012, China)

Abstract: In this paper, limit is narrated completely by changing process of variable, and precise definition of function limit is given. Essence of limit is revealed more accurately and profoundly.

Key words: limit; precise definition; variable